MPSI 1 - DS 4 - 12/01/2023

Consignes générales :

- L'ordre est indifférent, mais on séparera clairement les exercices ;
- il est conseillé de tous les aborder (difficulté progressive dans un exercice).
- Toute question, même qualitative, appelle une réponse argumentée.
- La qualité de la rédaction (*français* et *écriture mathématique*) sera notée.
- La qualité de la présentation également : soin, aération, résultats encadrés.
- Une application numérique sans unité explicite et appropriée ne sera pas prise en compte.
- Pour le nombre de chiffres significatifs à conserver pour le résultat final, on s'aligne sur la donnée la moins précise, avec au moins 2 chiffres significatifs (sauf indication contraire).

CINETIQUE CHIMIQUE (Concours ESTP)

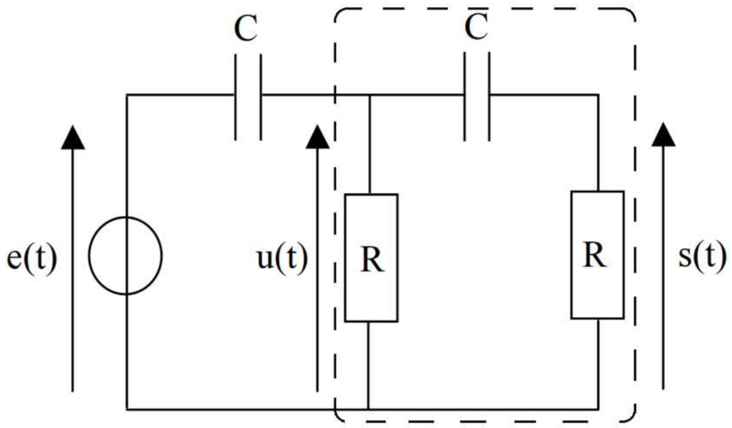
L'ion hypochlorite en solution aqueuse se dismute selon le bilan :

$$3\mathrm{ClO^-} \rightarrow \mathrm{ClO_3^-} + 2\mathrm{Cl^-} \,.$$

La cinétique est d'ordre p, la vitesse de réaction s'écrivant : $v = k[\mathrm{ClO^-}]^p$.

1. Sachant que $k = 1{,}03\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mol^{-1}\cdot L\cdot s^{-1}}$ à la température de travail ($T_1 = 343$ K), établir la loi d'évolution littérale de la concentration$[\mathrm{ClO^-}](t)$, avec $[\mathrm{ClO^-}]_0 = c_0$.
2. À partir de quelle date (t_{90}) a-t-on $[\mathrm{ClO^-}] \leq c_0/10$? Faire l'A.N. si $c_0 = 1{,}00\cdot 10^{-2}\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}}$. Commenter.
3. L'énergie d'activation ayant une valeur proche de 50 kJ/mol, calculer les valeurs de t_{90} aux températures $T_1 - 20$ et $T_1 + 20$. Conclure. On rappelle que $R = 8{,}31$ J/mol/K.

CIRCUIT DU DEUXIEME ORDRE



1. En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, déterminer le rapport des amplitudes complexes $\underline{S}/\underline{U}$, en faisant apparaître la grandeur adimensionnée $RC\omega$.
2. Exprimer l'admittance complexe du dipôle entouré en tirets, puis le rapport des amplitudes complexes $\underline{U}/\underline{E}$, en faisant également apparaître $RC\omega$.
3. En déduire le rapport des amplitudes complexes $S/\underline{E}$ sous la forme $N(j\omega)/D(j\omega)$, où N et D sont deux polynômes de variable $j\omega$.
4. Déduire de ce rapport l'équation différentielle vérifiée par $s(t > 0)$ si le circuit subit un échelon de tension ($e(t < 0) = 0$ et $e(t > 0) = E$), soit :

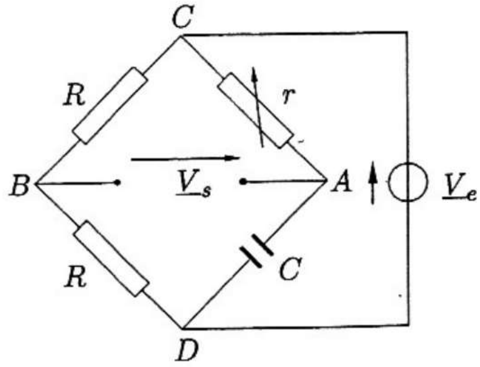
$$\ddot{s} + \frac{3}{RC}\dot{s} + \frac{1}{(RC)^2}s = 0 \,.$$

   NB : cette équation pourra être admise pour la suite si elle n'a pas été obtenue.

5. Donner la forme *générale* des fonctions solutions de cette équation, et en déduire la durée caractéristique τ du régime transitoire.
6. Déterminer les conditions initiales $s(0)$ et $\dot{s}(0)$; on ne demande pas de terminer la résolution.

CIRCUIT EN PONT EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE (Concours ENAC)

1. — On considère le circuit représenté sur le schéma de la figure ci-contre. Un pont dont les quatre branches sont constituées par trois résistors et un condensateur est alimenté par une source de tension sinusoïdale $v_e(t) = v_C - v_D = V_{e0}\cos(\omega t)$, de pulsation ω, connectée aux bornes de la diagonale CD. On désigne par $v_s(t) = v_A - v_B = V_{s0}\cos(\omega t + \varphi_1)$ la tension de sortie recueillie aux bornes de la diagonale AB.



On définit la fonction de transfert $\underline{T_1}(j\omega)$ du circuit par le rapport de l'amplitude complexe $\underline{V}_s$ associée à la tension de sortie sur l'amplitude complexe $\underline{V}_e$, associée à la tension d'entrée.

Exprimer $\underline{T_1}(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$

A) $\underline{T_1}(j\omega) = 1 - jrC\omega$

B) $\underline{T_1}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jrC\omega}$

C) $\underline{T_1}(j\omega) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}\right)$

D) $\underline{T_1}(j\omega) = \dfrac{1 + jrC\omega}{1 - jrC\omega}$

2. — Exprimer le déphasage φ_1 de la tension de sortie $v_s(t)$ par rapport à la tension d'entrée $v_e(t)$.

A) $\varphi_1 = -2\arctan(rC\omega)$

B)

C) $\varphi_1 = \arctan(2rC\omega)$

D) $\varphi_1 = -\arctan\left(\dfrac{rC\omega}{2}\right)$

3. — On donne $\omega = 1000\, rad.s^{-1}$ et C = 1 μF. Quelle valeur r_0 doit-on donner à r pour que $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$?

A) $r_0 = 5000\ \Omega$

A) $r_0 = 1000\ \Omega$

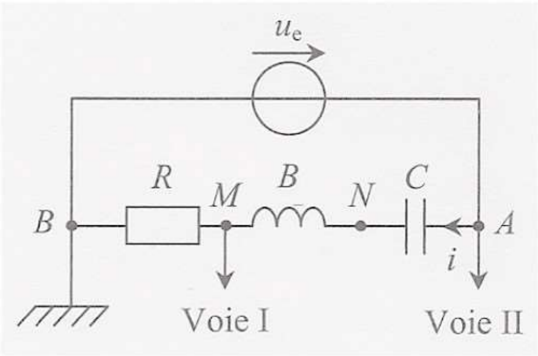
A) $r_0 = 3000\ \Omega$

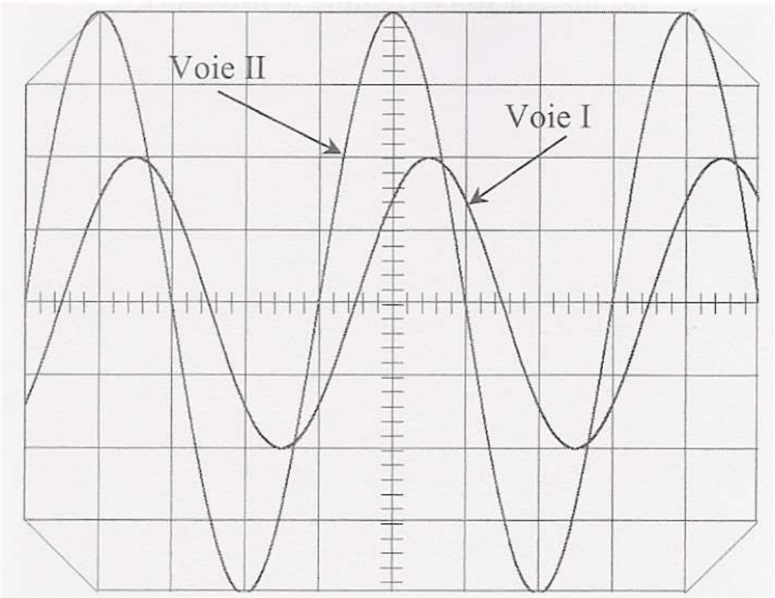
A)

DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES D'UNE BOBINE

Pour étudier une bobine réelle B, on effectue le montage indiqué sur le schéma. C'est ainsi que l'on obtient l'oscillogramme (copie d'écran de l'oscilloscope) ci-dessous. Les calibres de l'oscilloscope sont identiques pour les deux voies : 2 V/division pour l'axe des ordonnées et 1 ms/division pour l'axe des abscisses.

Le générateur délivre une tension $u_e(t) = U_m \cos(\omega t)$. On donne : R = 20 Ω et C = 10 μF.





1) L'oscillogramme permet de calculer les valeurs de la période T, de la pulsation ω, des amplitudes U_m et I_m, et de l'impédance Z_{AB} (module de l'impédance complexe du dipôle AB). Déterminer ces valeurs numériques et recopier, en le complétant, le tableau qui suit.

Grandeur	T(s)	ω (rad/s)	I_m (A)	U_m (V)	Z_{AB} (Ω)
Valeur numérique					

2) Des deux tensions u_I et u_{II}, laquelle est en avance de phase sur l'autre ?

3) Calculer le déphasage φ entre la tension $u_e(t) = U_m \cos(\omega t)$ et l'intensité du courant $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$.

4) Montrez que, dans l'hypothèse d'une bobine idéale B de résistance interne r nulle, les valeurs numériques de Z_{AB}, φ et R sont incohérentes.

5) Il est donc nécessaire de prendre en compte la résistance interne r de la bobine. Calculer r.

6) En déduire la valeur numérique de l'inductance L de la bobine.

7) Calculer la fréquence de résonance d'intensité de ce circuit ; si on se place à cette fréquence, recopier en le complétant le tableau suivant :

Tension :	$u_R = u_{MB}$	$u_{L,r} = u_{MN}$	$u_C = u_{AN}$
Amplitude (V) :			
Phase à l'origine (rad) :			

8) Calculer le facteur de qualité du circuit ; que peut-on en déduire quant à la fréquence de résonance de u_C ?

CIRCUIT DU DEUXIEME ORDRE

1) division de tension : $\dfrac{\underline{S}}{\underline{U}} = \dfrac{R}{R+\underline{Z}_c} = \boxed{\dfrac{jRC\omega}{1+jRC\omega}}$

2) $\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R+1/jC\omega} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{jC\omega}{1+jRC\omega} = \dfrac{1}{R}\left(1+\dfrac{jRC\omega}{1+jRC\omega}\right)$

$= \boxed{\dfrac{1}{R}\,\dfrac{1+2jRC\omega}{1+jRC\omega}}$

div. de tension :

$\dfrac{\underline{U}}{\underline{E}} = \dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z}+\underline{Z}_c} = \dfrac{\underline{Y}_c}{\underline{Y}_c+\underline{Y}} = \boxed{\dfrac{jC\omega}{jC\omega+\frac{1}{R}\frac{1+2jRC\omega}{1+jRC\omega}}}\ \boxed{\dfrac{jRC\omega}{jRC\omega+\frac{1+2jRC\omega}{1+jRC\omega}}}$

3) $\dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{U}} \times \dfrac{\underline{U}}{\underline{E}} = \dfrac{(jRC\omega)^2}{(1+jRC\omega)jRC\omega+1+2jRC\omega} = \boxed{\dfrac{(RC)^2(j\omega)^2}{1+3RC(j\omega)+(RC)^2(j\omega)^2}}$

4) $\left(1+3RC(j\omega)+(RC)^2(j\omega)^2\right)\underline{S} = (RC)^2(j\omega)^2\underline{E}$ correspond dans le cas le plus général, avec $j\omega \to \dfrac{d}{dt}$, à l'E.D. :

$s + 3RC\dot{s} + (RC)^2\ddot{s} = (RC)^2\ddot{e}$

Ce qui pour un échelon donne : $\boxed{\ddot{s} + \dfrac{3}{RC}\dot{s} + \dfrac{1}{(RC)^2}s = 0}$

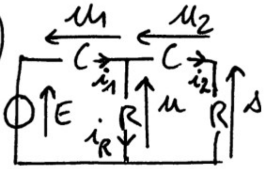
5) Le polynôme résolvant associé est $x^2 + \dfrac{3}{RC}x + \dfrac{1}{(RC)^2} = 0$ de discriminant $\Delta = \dfrac{5}{(RC)^2} > 0$: $x_\pm = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{3}{RC} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{RC}\right)$

Les solutions $s(t)$ sont alors :

$s(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{2RC}(3+\sqrt{5})\right) + B\exp\left(-\dfrac{t}{2RC}(3-\sqrt{5})\right)$

$= A\exp(-t/\tau_1) + B\exp(-t/\tau_2)$

Le tps caractéristique de l'extinction du régime transitoire est le plus grand des deux, c'est donc $\boxed{\tau_2 = \dfrac{2RC}{3-\sqrt{5}}}$.

6) 

$u_{C1}(0^+) = u_{C2}(0^+) = 0$ par continuité de u_C.

La loi des mailles donne alors $\boxed{s(0^+) = E}$.

Pour $\dot{s}$ c'est moins évident !

La dérivée de la l.d.m. donne $\dot{E} = 0 = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \dot{s}$

$= \dfrac{1}{C}i_1 + \dfrac{1}{C}i_2 + \dot{s}$

Il faut donc trouver i_1 et i_2 à 0^+ :

$\left.\begin{array}{l} s(0^+) = E \Rightarrow i_2(0^+) = \dfrac{E}{R} \\ u_1(0^+) = 0 \underset{ldm}{\Rightarrow} u(0^+) = E \Rightarrow i_R(0^+) = \dfrac{E}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow i_1(0^+) = \dfrac{2E}{R}$ par loi des noeuds.

On a donc $\boxed{\dot{s}(0^+) = -\dfrac{3E}{RC}}$

CINETIQUE CHIMIQUE (Concours ESTP) – ***corrigé***

1) v est en $mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$ donc k est en $mol^{1-p} \cdot L^{p-1} \cdot s^{-1}$ et ici $\boxed{p=2}$.

On a donc $v = -\frac{1}{3}\frac{d[ClO^-]}{dt} = k[ClO^-]^2$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{[ClO^-]^2}\frac{d[ClO^-]}{dt} = 3k \Rightarrow \frac{1}{[ClO^-]} = +3kt + C^{te}$$

avec $[ClO^-]_0 = c_0$, on a : $\boxed{\frac{1}{[ClO^-]} = \frac{1}{c_0} + 3kt}$.

$$\boxed{[ClO^-] = \frac{c_0}{1+3kc_0t}}$$

2) A.N. $[ClO^-] \leq \frac{c_0}{10} \Leftrightarrow t \geq \frac{3}{kc_0}$

(AN : $t_{90} \simeq 81\,h$

(csqce : les solutions doivent être préparées peu avant leur utilisation.

3) loi d'Arrhénius : $k(T) = A \cdot e^{-Ea/RT} \Rightarrow \boxed{\frac{k(T_2)}{k(T_1)} = e^{-\frac{Ea}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}}$

AN : $\frac{k(323)}{k(343)} \simeq 0{,}34 = \frac{t_{90}(343)}{t_{90}(323)}$ $\hookrightarrow t_{90}(323) \simeq 240\,h \simeq 10$ jours

$\frac{k(363)}{k(343)} \simeq 2{,}63 = \frac{t_{90}(343)}{t_{90}(363)} \longrightarrow t_{90}(363) \simeq 31\,h$

L'influence de T est notable.

CIRCUIT EN PONT EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE (Concours ENAC) – ***corrigé***

1) On a affaire à une forme de circuit très classique appelée "pont" (que l'on a déjà rencontré, au passage, dans un DM et dans un DS : le pont de Wheatstone, utilisé notament pour la mesure précise de résistances).

La résolution est très simple si on s'y prend bien : on remarque déjà que, grâce à la loi des mailles, on peut dire que :

$$\underline{V}_s = \underline{U}_{AD} - \underline{U}_{BD}$$

Ensuite, comme le condensateur et la résistance r sont en série (puisque aucun courant ne circule entre A et B) et que la tension totale aux bornes de l'ensemble de ces deux dipôles est $\underline{V}_e$, on peut écrire, grâce à la formule du diviseur de tension, que :

$$\underline{U}_{AD} = \underline{V}_e \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+r} = \underline{V}_e \frac{1}{1+jrC\omega}$$

En faisant de même avec les deux résistances R qui sont également en série, on obtient :

$$\underline{U}_{BD} = \underline{V}_e \frac{R}{R+R} = \frac{\underline{V}_e}{2}$$

On en déduit que :

$$\underline{V}_s = \underline{U}_{AD} - \underline{U}_{BD} = \underline{V}_e \left(\frac{1}{1+jrC\omega} - \frac{1}{2}\right) = \underline{V}_e \left(\frac{1-jrC\omega}{2(1+jrC\omega})\right)$$

D'où la fonction de transfert :

$$\underline{T_1}(j\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-jrC\omega}{1+jrC\omega}\right)$$

2) On a $\varphi_1 = arg(\underline{T_1(j\omega)}) = arg(1-jrC\omega) - arg(1+jrC\omega)$
$= \arctan(-rC\omega) - \arctan(rC\omega) = -2\arctan(rC\omega)$.

3) $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ implique que $\arctan(rC\omega) = \frac{\pi}{4}$, soit $rC\omega = \tan(\pi/4) = 1$, donc $r = \frac{1}{C\omega} = 1000\Omega$.

DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES D'UNE BOBINE – ***corrigé***

Caractéristiques d'une bobine

1) $T = 4\ \text{ms} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^3 \simeq 1{,}57 \cdot 10^3\ \text{rad/s}$

$U_m = A_{II} = 8\text{V}$; $I_m = \frac{A_I}{R} = 200\ \text{mA}$; $Z_{AB} = \frac{A_{II}}{A_I} R = 2R$.

2) U_{II} passe par son maximum $\frac{1}{8}$ de période avant U_I, elle est donc en avance de $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ pour ce qui est de l'origine.

3) $\underline{U}_{BM} = A_I e^{j\varphi_I}$ avec $\varphi_I = -\pi/4$ d'après ce qui précède.

$I_m = \frac{A_I}{R}$ déjà calculé : 200 mA.

4) L idéale $\Rightarrow \underline{Z}_{AB} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow Z_{AB} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Or on a vu que $Z_{AB} = 2R$, d'où $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 3R^2$

Le déphasage de i p/r u_e est $-\arg(\underline{Z}_{AB})$, donc imp.!

$\arg(\underline{Z}_{AB}) = \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}$ et $L\omega - \frac{1}{C\omega} = R$

5) Cette fois $\tan\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R+r}$ et $Z_{AB} = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

6) On en déduit : $2R = \sqrt{2(R+r)^2}$ et donc $r = (\sqrt{2} - 1)R$.

alors $L\omega = \frac{1}{C\omega} + R + r$ et $L \simeq 58{,}5\ \text{mH}$. $r \simeq 8{,}3\ \Omega$

7) $f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} \simeq 208\ \text{Hz}$. $U_R(f_0) = U_m = 8\text{V}$ car $\underline{Z}_{AB}(f_0) = R$

$U_C(f_0) = \frac{1}{RC\omega_0} U_m = \frac{L\omega_0}{R} U_m = U_L(f_0) \simeq 21{,}6\text{V}$.

Il y a surtension aux bornes de L et C, mais avec $\varphi_C = -\pi/2$, $\varphi_L = +\pi/2$ de sorte que $u_C(t) + u_L(t) = 0$

8) $Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 2{,}7$ (c'est aussi le facteur de surtension)

On a $\frac{1}{4Q^2} \ll 1$, $\omega_{r,C} \simeq \omega_{r,i}$ (à 2% près)